模块三 离散型随机变量及其分布

第 1 节 条件概率公式、全概率公式（★★★）

强化训练

1.（★★）有 50 人报名足球俱乐部，60 人报名乒乓球俱乐部，70 人报名足球或乒乓球俱乐部. 若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球俱乐部的概率为（　　）

（A）0.8　　（B）0.6　　（C）0.5　　（D）0.4

答案：A

解法 1：所求概率为条件概率，先设事件，再套公式，

设某人报足球俱乐部为事件 A，报乒乓球俱乐部为事件 B，则所求概率为 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ ①，

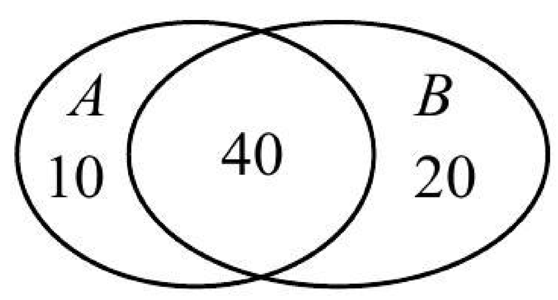
要算 $P(AB)$ 和 $P(A)$，需要 $n(AB)$，$n(A)$ 和 $n(\Omega)$，为了分析各部分构成，我们画图来看，

如图，$n(AB)=40$，$n(A)=50$，$n(\Omega)=70$，所以 $P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{7}$，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5}{7}$，代入①得 $P(B\mid A)=0.8$.

解法 2：也可利用条件的直观意义，将报足球俱乐部的人作为新的样本空间来考虑. 要计算所求概率，应先分析各部分的人数构成，题干的文字描述较抽象，可画 Venn 图来看，

设报名足球俱乐部的 50 人构成集合 A，报名乒乓球俱乐部的 60 人构成集合 B，如图，

报足球俱乐部的 50 人中有 40 人报乒乓球俱乐部，故所求概率 $P=\dfrac{40}{50}=0.8$.



2.（2023·营口模拟·★★）在射击比赛中，甲、乙两人对同一目标各进行一次射击，甲击中目标的概率为 $\dfrac{3}{5}$，乙击中目标的概率为 $\dfrac{4}{5}$，则在目标被击中的情况下，甲击中目标的概率为（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{12}{25}$　　（C）$\dfrac{15}{23}$　　（D）$\dfrac{3}{7}$

答案：C

解析：设目标被击中为事件 A，甲击中目标为事件 B，

要算 $P(B\mid A)$，可套用条件概率公式 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，下面先算分子，

由题意，$B\subseteq A$，所以 $AB=B$，故 $P(AB)=P(B)=\dfrac{3}{5}$，

再求 $P(A)$，目标被击中只需甲乙至少一人击中即可，情况较多，用对立事件来算比较方便，

又 $P(A)=1-(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{4}{5})=\frac{23}{25}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{23}{25}}=\frac{15}{23}$.

3．（2022•湖南模拟•★★）某人忘记了一个电话号码的最后一个数字，只好去试拨，则他第一次失败，第二次成功的概率是_____.

答案： $\frac{1}{10}$

解析： 设他第一次失败为事件 A，第二次成功为事件 B，则所求概率即为 $P(AB)$，

事件 A 是否发生对事件 B 有影响，二者不独立，故用乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 来求 $P(AB)$，

由题意，$P(A)=\frac{C_9^1}{C_{10}^1}=\frac{9}{10}$，$P(B|A)=\frac{C_1^1}{C_9^1}=\frac{1}{9}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$.

4．（2023•浙江联考•★★★）已知随机事件 A，B 满足 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(A|B)=\frac{3}{4}$，则 $P(\bar{B}|A)=$_____.

答案： $\frac{7}{16}$

解析： 所求概率中有 $\bar{B}$，已知条件中没有 $\bar{B}$，先用条件概率性质将 $\bar{B}$ 转换成 B，并套用条件概率公式，

由条件概率性质，$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{P(AB)}{P(A)}=1-3P(AB)$ ①，

此时发现只需求 $P(AB)$，将 $P(A|B)$ 展开会出现这部分，

由题意，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3}{4}$，所以 $P(AB)=\frac{3}{4}P(B)=\frac{3}{16}$，代入①得 $P(\bar{B}|A)=1-3\times\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$.

5．（2023•石家庄模拟•★★★）某种疾病的患病率为 5%，通过验血诊断该疾病的误诊率为 2%，即非患者中有 2%的人诊断为阳性，患者中有 2%的人诊断为阴性. 随机抽取 1 人进行验血，则其诊断结果为阳性的概率为（　　）

（A）0.46　（B）0.046　（C）0.68　（D）0.068

答案： D

解析： 诊断结果为阳性，实际可能是患病中诊出阳性，也可能是不患病中诊出阳性，故按是否患病划分样本空间，套用全概率公式算概率，

记随机抽取的 1 人患病为事件 A，诊断结果为阳性为事件 B，

则由全概率公式，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=5\%\times(1-2\%)+(1-5\%)\times 2\%=0.068$.

6．（2022•厦门模拟•★★★）某游泳小组共有 20 名运动员，其中一级运动员 4 人，二级运动员 8 人，三级运动员 8 人. 现举行一场游泳选拔比赛，若一、二、三级运动员能够晋级的概率分别是 0.9，0.7，0.4，则在这 20 名运动中任选一名运动员，他能够晋级的概率为（　　）

（A）0.58　（B）0.6　（C）0.62　（D）0.64

答案： C

解析： 给出了各级运动员晋级的概率，故按取到运动员的级别来划分样本空间，套用全概率公式计算，

记取到一、二、三级运动员分别为事件 A_1，A_2，A_3，取到的运动员能晋级为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{C_4^1}{C_{20}^1}\times 0.9+\frac{C_8^1}{C_{20}^1}\times 0.7+\frac{C_8^1}{C_{20}^1}\times 0.4=0.62$.

7.（2023•浙江模拟•★★★★）随着城市经济的发展，早高峰问题越发严重，上班族需要选择合理的出行方式，某公司员工小明上班出行的方式有三种，某天早上他选择自驾、坐公交车、骑共享单车的概率均为 $\frac{1}{3}$，而他自驾、坐公交车、骑共享单车迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，结果这一天他迟到了，在此条件下，他自驾去上班的概率是_____.

答案： $\frac{15}{37}$

解析：设这一天小明迟到为事件 A，自驾、坐公交车、骑共享单车去上班分别为事件 B_1，B_2，B_3，

则所求概率为 $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}$，

接下来先求 $P(AB_1)$，先罗列条件，$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$，$P(A|B_1)=\frac{1}{4}$，$P(A|B_2)=\frac{1}{5}$，$P(A|B_3)=\frac{1}{6}$，故用乘法公式算分子时，应转换条件为 B_1，

由乘法公式，$P(AB_1)=P(B_1)P(A|B_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，

再算 $P(A)$，结合已知条件可知用全概率公式. 给出了三种出行方式迟到的概率，故按出行方式划分样本空间，

由全概率公式，$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{37}{180}$，

所以 $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{37}{180}}=\frac{15}{37}$.

8.（2022•重庆模拟•★★★）由于身体及心理方面的差异，人们往往认为女性驾驶员比男性驾驶员更容易发生交通事故. 为调查这一认识是否正确，同学们组成了调查小组，对其所在的城市进行了调查研究，结果显示：该市 2021 年男女驾驶员的比例为 7:3，男性驾驶员平均万人的发案率为 2.2，女性驾驶员平均万人的发案率为 0.25.（发案即发生交通事故，暂不区分其是否为肇事责任人）

（1）在 2021 年全市的驾驶员中随机抽取 1 人，若该人发案的概率为 $a\times 10^{-4}$，求 a 的值；

（2）若该市一名驾驶员在 2021 年发生了交通事故，则其为女性的概率是多少？（保留到小数点后三位）

解：（1）（题干给出了男、女驾驶员的发案率，故按男、女划分样本空间，套用全概率公式求概率）

记取到男驾驶员为事件 A_1，取到女驾驶员为事件 A_2，取到的人发案为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{7}{10}\times\frac{2.2}{10000}+\frac{3}{10}\times\frac{0.25}{10000}=\frac{16.15}{10^5}=16.15\times 10^{-5}$，

由题意，$16.15\times 10^{-5}=a\times 10^{-4}$，所以 $a=1.615$.

（2）所求概率为 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}$，（分母已经有了，要算分子，可转换条件为 A_2，用乘法公式算）

由乘法公式，$P(A_2B)=P(A_2)P(B|A_2)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{0.25}{10000}=7.5\times10^{-6}$，所以 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{7.5\times10^{-6}}{16.15\times10^{-5}}\approx0.046$.

9.（2023 • 新高考 I 卷 • ★★★★）甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签确定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

（1）求第二次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}q_i$，记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次）投篮中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

解：（1）（第一次投篮的人可能是甲，也可能是乙，两种情况下第二次投篮的人是乙的概率都是已知的，故按第一次投篮的人是谁划分样本空间，套用全概率公式）

记第 $i(i=1,2,3,\cdots)$ 次投篮的人是甲为事件 A_i，第 2 次投篮的人是乙为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(\overline{A}_1)P(B|\overline{A}_1)=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

（2）（从第 $i-1$ 次到第 i 次的投篮情况，我们可画图辅助理解，如下图，第 $i-1$ 次两种情况下第 i 次投篮的人是甲的概率都已知，故根据第 $i-1$ 次由谁投篮划分样本空间，套用全概率公式来建立递推公式）

当 $i\ge2$ 时，由全概率公式，$P(A_i)=P(A_{i-1})P(A_i|A_{i-1})+P(\overline{A}_{i-1})P(A_i|\overline{A}_{i-1})=P(A_{i-1})\times0.6+[1-P(A_{i-1})]\times0.2$，

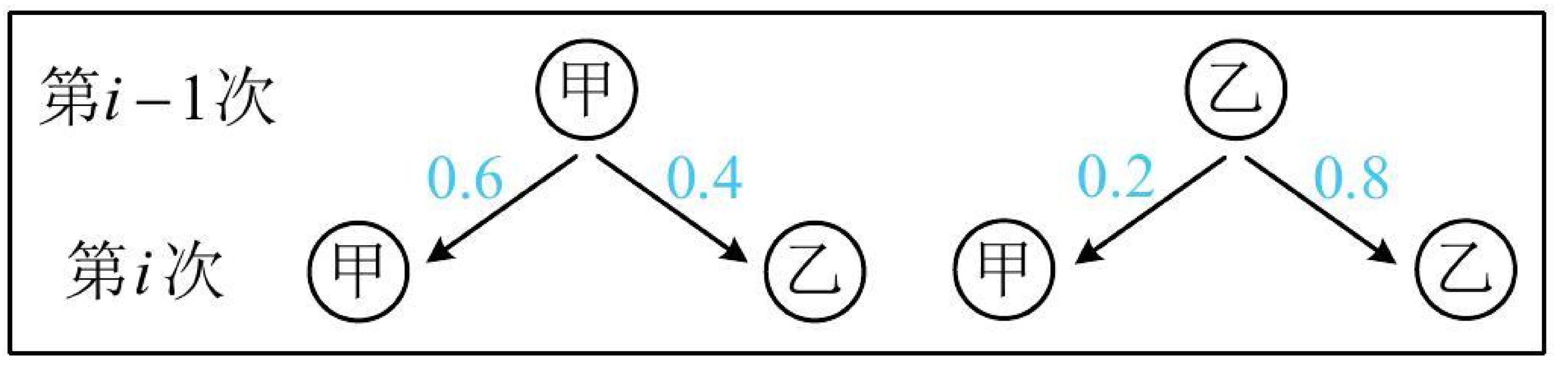
整理得：$P(A_i)=\dfrac{2}{5}P(A_{i-1})+\dfrac{1}{5}$ ①，

（要由此递推公式求 $P(A_i)$，可用待定系数法构造等比数列，设 $P(A_i)+\lambda=\dfrac{2}{5}[P(A_{i-1})+\lambda]$，展开化简得 $P(A_i)=\dfrac{2}{5}P(A_{i-1})-\dfrac{3}{5}\lambda$，与 $P(A_i)=\dfrac{2}{5}P(A_{i-1})+\dfrac{1}{5}$ 对比可得 $-\dfrac{3}{5}\lambda=\dfrac{1}{5}$，所以 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$）

由①可得 $P(A_i)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{5}[P(A_{i-1})-\dfrac{1}{3}]$，又 $P(A_1)=0.5=\dfrac{1}{2}$，所以 $P(A_1)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，故 $\left\{P(A_i)-\dfrac{1}{3}\right\}$ 是等比数列，

首项为 $\dfrac{1}{6}$，公比为 $\dfrac{2}{5}$，所以 $P(A_i)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{2}{5})^{i-1}$，故 $P(A_i)=\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{2}{5})^{i-1}+\dfrac{1}{3}$，

即第 i 次投篮的人是甲的概率为 $\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{2}{5})^{i-1}+\dfrac{1}{3}$.



（3）（题干给出了一个期望的结论，我们先把它和本题的背景对应起来. 所给结论涉及两点分布，那本题背景下有没有两点分布呢？有的，在第 i 次的投篮中，若设甲投篮的次数为 X_i，则 X_i 的取值为 1（表示第

i 次投篮的是甲）或0（表示第 i 次投篮的是乙），所以 X_i 就服从两点分布，且前 n 次投篮的总次数即为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$，故直接套用所给的期望公式就能求得答案）

设第 i 次投篮中，甲投篮的次数为 X_i，则 $P(X_i=1)=P(A_i)$，且 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$，

所以 $E(Y)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，由所给结论，

$$E(Y)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^0+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{n-1}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}[(\frac{2}{5})^0+(\frac{2}{5})^1+\cdots+(\frac{2}{5})^{n-1}]+\frac{n}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{1-(\frac{2}{5})^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}.$$

10.（2023•湖北模拟•★★★★）从有 3 个红球和 3 个蓝球的袋中，每次随机摸出 1 个球，摸出的球不放回，记 A_i 表示事件“第 i 次摸到红球”，$i=1,2,\cdots,6$.

（1）求第一次摸到蓝球的条件下，第二次摸到红球的概率；

（2）在同一试验下，记 $P(B_1B_2B_3)$ 表示 B_1，B_2，B_3 同时发生的概率，$P(B_3|B_1B_2)$ 表示在 B_1 和 B_2 都发生的条件下，B_3 发生的概率，若 $P(B_1)>0$，$P(B_1B_2)>0$，证明：$P(B_1B_2B_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1B_2)$；

（3）求 $P(A_3)$.

解：（1）第一次摸到蓝球作为新的样本空间，袋中还剩 3 个红球和 2 个蓝球，

所以第二次摸到红球的概率为 $\frac{3}{5}$.

（2）**证法 1：**（右侧较复杂，考虑将其化简为左侧，右侧有 2 个条件概率，故可用条件概率公式）

由条件概率公式，$P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1B_2)=P(B_1)\cdot\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}\cdot\frac{P(B_1B_2B_3)}{P(B_1B_2)}=P(B_1B_2B_3)$.

证法 2：（观察发现目标等式右侧有以 B_1B_2 为条件的条件概率，故在 $P(B_1B_2B_3)$ 中将 B_1B_2 看作整体，用乘法公式）

由乘法公式，$P(B_1B_2B_3)=P(B_1B_2)P(B_3|B_1B_2)$ ①，（与目标等式对比发现，再对 $P(B_1B_2)$ 用乘法公式即可）

又 $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)$，代入①可得 $P(B_1B_2B_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1B_2)$.

（3）（第 3 次摸球的情况与前 2 次的结果有关，故考虑按前 2 次的结果划分样本空间，用全概率公式来求 $P(A_3)$，前两次的结果不外乎 4 种：A_1A_2，$\overline{A}_1A_2$，$A_1\overline{A}_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2$）

由全概率公式，$P(A_3)=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)P(A_3|\overline{A}_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)P(A_3|A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$ ②，

（上式中形如 $P(A_3|A_1A_2)$ 的项容易计算，形如 $P(A_1A_2)$ 的项不好算，可再用乘法公式对它们变形）

又 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$，$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$，$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)$，$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)$，

代入②得：$P(A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1A_2)+P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)P(A_3|A_1\overline{A}_2)$

$$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$